Formelsammlung Analysis

29.12.2016

Florian Protschka
Quantitative Economics Master Sc.
Christian-Albrechts Universität zu Kiel

Wichtige Definitionen und Sätze Analysis

Def.: $I \subseteq IR$ (I: Intervall), $f: I \to IK \in \{IR, C\}$, $x_0 \in I$

f ist <u>differenzierbar in $x_0 \in I$</u> $:\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$

f ist <u>differenzierbar in I</u> $:\Leftrightarrow \forall_{x_0 \in I}$ f differenzierbar in x_0, $f': I \to IK$ <u>Ableitung von f</u>
$x_0 \mapsto f'(x_0)$, $f'(x_0)$: <u>Ableitung von f in x_0</u>

Rechenregeln: Satz: f, g: $I \to IK$ differenzierbar in $x_0 \in I$, $c \in IK$

1) $f \pm g$ differenzierbar in x_0 mit $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
   cf differenzierbar in x_0 mit $(cf')(x_0) = cf'(x_0)$
2) $f * g$ differenzierbar in x_0 mit $(fg)'(x_0) = \underbrace{f'(x_0)g(x_0) + (f(x_0)g'(x_0)}_{\text{Produktregel}}$
3) $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)$ differenzierbar in x_0 $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)$
   $= \underbrace{\frac{g(x_0) f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}}_{Quotientenregel}$

Satz: Rationale Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich differenzierbar.

Satz von <u>Rolle</u>: Seien $a, b \in IR$, $a < b$, $f: [a,b] \to IR$ stetig in (a, b) differenzierbar und f(a)=f(b)=0 $\Rightarrow \exists_{\xi \in (a,b)} f'(\xi) = 0$ (Spezialfall: MWS für f(b)=f(a)=0)

<u>Kettenregel</u>: $I \xrightarrow{f} f \xrightarrow{g} IR$, $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) * f'(x)$

<u>Mittelwertsatz</u> (MWS): Sei $f: [a,b] \to IR$ stetig und $f\big|_{(a,b)}$ sei differenzierbar
$\Rightarrow \exists_{\xi \in (a,b)}$ mit $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$ $\qquad m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
Steigung der Sekante = Steigung der Tangente

Taylorsche Formel

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j+R_{n+1}$$

Lagrange-Restglied:

$$R_{n+1}(f,x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\sigma(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Cauchy-Restglied:

$$R_{n+1}(f,x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\sigma(x-x_0))}{n!}(1-\sigma)^n(x-x_0)^{n+1}$$

Satz: I=[a,b], f: I$\to$IR sei differenzierbar $\Rightarrow$

1) $(\forall_{x\in(a,b)} f'(x)\geq 0)\Leftrightarrow$ f ist monoton wachsend

2) $(\forall_{x\in(a,b)} f'(x)<0)\Leftrightarrow$ f ist streng monoton wachsend

Def.: f:[a,b] $\to$IR. f heisst

Konvex: $\forall_{x,y\in[a,b]} f(\sigma x+(1-\sigma)y)\leq \sigma f(x)+(1-\sigma)f(y)$

$0<\sigma<1$

$f''(x)\geq 0$

Konkav: $\forall_{x,y\in[a,b]} f(\sigma x+(1-\sigma)y)\geq \sigma f(x)+(1-\sigma)f(y)$

$0<\sigma<1$

$f''(x)\leq 0$

Def.: I$\subset$IR Intervall, f_n: I$\to$IK stetig, $n\in IN$, $\sum\limits_{n\in IN} f_n$ ist <u>gleichmäßig konvergent auf I</u>

$:\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in IN}\forall_{m>n>n_0}$, x$\in$I $\left|\sum_{j=n}^{m} f_j(x)\right|<\varepsilon \to \left|\sum_{j=n}^{\infty} f_j(x)\right|\leq\varepsilon$

Satz: Seien $(a_n)_{n=0}^{\infty}\in K^{IN_0}, x_0\in IK$. Dann gibt es eine Zahl $0\leq r\leq\infty$ sodass die Potenzreihe

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ für alle $x\in IK$ mit

$\lvert x-x_0\rvert<r$	absolut konvergent
$\lvert x-x_0\rvert<r-\varepsilon$	mit einem festen $0<\varepsilon<r$ gleichmäßig konvergent
$\lvert x-x_0\rvert>r$	divergent

Die Zahl r heisst <u>Konvergenzradius</u> der Potenzreihe und lässt sich ausrechnen durch

$r=\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\lvert a_n\rvert}\right)^{-1}$ Hierbei ist $\frac{1}{0}=\infty$, $\frac{1}{\infty}=0$

Identitätssatz für Potenzreihen

Seien $x_0 \in IK, (a_n)_{n\in IN} \in IK^{IN_0}$ und $r = \left(\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$ >0. Falls für alle $x \in IK$ mit $|x - x_0| < r$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = 0$, folgt: alle a_n =0, $n \in IN_0$

Def.: Seien Z_1, Z_2 Zerlegungen von I=[a,b]. Z_1 ist feiner als $Z_2 \Leftrightarrow Z_1 \geq Z_2$

Lemma: Z_1 feiner als $Z_2 \Rightarrow \underline{S}(Z_1) \geq \underline{S}(Z_2)$, $\overline{S}(Z_1) \leq \overline{S}(Z_2)$

$\underline{S}(Z_2) \leq \underline{S}(Z_1)$, $\overline{S}(Z_1) \leq \overline{S}(Z_2)$

Bei feineren Zerlegungen liegen Ober- und Untersumme näher zusammen.

Satz: <u>Riemannsches Integrierbarkeitskriterium Sei f:[a,b]</u> $\rightarrow$IR beschränkt$\Rightarrow$ [f integrierbar$\Leftrightarrow$ $\forall_{\varepsilon>0} \exists_z \overline{S}(f,z) - \underline{S}(f,z) < \varepsilon$

Zerlegung
von [a,b]

Def.: <u>Riemann-Summen</u>

Sei $Z = \{x_0, ..., x_n\}$ Zerlegung von von [a,b]

$x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$

$I_k = [x_{k-1}, x_k]$

$\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ mit $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $\qquad m_k = \inf_{Ik} f$

$M_k = \sup_{Ik} f$

Dann heisst $S(Z,\xi) := \sum_{k=1}^{n} f_{\xi_k} |I_k|$ <u>Riemannsumme</u> zu (Z,ξ). Also $\underline{S}(Z) < S(Z,\xi) \leq \overline{S}(Z)$

Def.: Seien a,b$\in$ IR, a< b, I= [a, b] , f: I$\rightarrow$IR. Eine <u>differenzierbare Funktion</u> F:I$\rightarrow$IR heisst <u>Stammfunktion von f</u> : $\Leftrightarrow$ $\forall_{x\in I} F'(x) = f(x)$

<u>Hauptsatz:</u>

a) I=[a, b] , f:I$\rightarrow$IR integrierbar und F:I$\rightarrow$IR sei Stammfunktion von f

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b =: F(x) \Big|_a^b$$

b) I=[a, b] , f: I$\rightarrow$IR stetig $\Rightarrow$ f integrierbar und f besitzt eine Stammfunktion F, nämlich

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt \ , \ x \in [a,b]$$

Satz: Partielle Integration

f, g: [a, b] $\rightarrow$ IR stetig differenzierbar $\Rightarrow$

a) $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

b) $\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

Satz: Substitutionsformel

F: [a, d] $\rightarrow$IR stetig, g: [a, b] $\rightarrow$[c, d] stetig differenzierbar und bijektiv. F sei Stammfunktion von f $\Rightarrow$

a)

$$\int f(x)dx = \int (f \circ g)g'(y)dy \;\Big|_{y=g^{-1}(x)} = F(x)$$

$$\int (f \circ g)(y)g'(y)dy = \int f(x)dx \;\Big|_{x=g(y)} = F(g(y))$$

b)

$$\int_c^d f(x)dx = \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} (f \circ g)(y)g'(y)dy$$ Substitution $\Rightarrow$ $x = g(y)$

Satz: Majorantenkriterium

Seien f, g: [a, b] $\rightarrow$IR auf kompaktem Teilintervall integrierbar und es gelte $|f| \leq g$

Es existiere $\int_a^b |f(x)|dx$ und $\int_a^b f(x)dx$ mit

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b g(x)di$$ (Monotonie)

Satz: Vertauschung von Summation und Integration

I= [a, b], f: I$\rightarrow$IR stetig, f:= $\sum_{k\in IN} f_n$ gleichmäßig gegen f konvergent $\Rightarrow$ f integrierbar und

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b \left(\sum_{n\in IN} f_n(x) \right) dx = \sum_{n\in IN} \left(\int_a^b f_n(x)dx \right)$$ „Gliedweise Integration unendlicher Reihen <u>bei gleichmäßiger Konvergenz</u> der Reihe“

Satz: I= [a, b], f_n : I $\to$IR stetig differenzierbar ($n \in IN$)
Es sei $f := \sum_{n\in IN} f_n$ punktweise auf I konvergent und $\sum_{n\in IN} f_n{}'$ sei gleichmäßig konvergent

$\Rightarrow$ f ist differenzierbar und $f'(x) = \left(\sum_{n\in IN} f_n\right)'(x) = \sum_{n\in IN} f_n{}'(x)$, $x \in I$

$\left(\sum f_n\right)' = \sum (f_n{}')$ falls $\sum (f_n{}')$ gleichmäßig konvergent ist.

Def.: $IK \in \{IR, C\}$, X Vektorraum über IK, X= $IK^n = \{(x_1,\ldots,x_n) = X\}$ $x_i \in IK$, $i = 1,\ldots,n$
$\|\bullet\| : X \to IR_{\geq 0}$ sei eine Abbildung, die folgende Eigenschaften habe:
1) $\forall_{x\in X} \|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $\forall_{x\in X}, \alpha \in IK$ $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in IK, \alpha x = (\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n)$
3) $\forall_{x,y\in X} \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Dreiecksungleichung

Dann heisst $\|\bullet\|$ eine <u>Norm</u> und $(X, \|\bullet\|)$ ein <u>normierter Raum</u>.
(Anschaulich: $\|X\|$= „Länge des Vektors $x \in X$ “)

Def.: X Vektorraum über IK. Eine Abbildung $\langle \bullet,\bullet \rangle : X \times X \to IK$ heisst <u>Skalarprodukt</u>
$:\Leftrightarrow \forall_{x,y\in X}, \alpha, \beta \in IK$ gelte:
1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ Symmetrie
2) $\langle x, x\rangle \geq 0$ und $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$ Linearität

Satz: $(X, \langle \bullet,\bullet \rangle)$ Vektorraum über IK mit Skalarprodukt. Sei $\|X\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}, x \in X \Rightarrow \|\bullet\|$ ist eine Norm auf X. $\|\bullet\|$ heisst die vom <u>Skalarprodukt induzierte Norm</u>.
Def.: $(X, \langle \bullet,\bullet \rangle)$ Raum mit Skalarprodukt. Unter $\|\bullet\| = \sqrt{\langle \bullet,\bullet \rangle}$ heisst X ein <u>Prähilbertraum</u>

Def.: Metrische Räume = Mengen mit Abstandsbegriff
Sei X Menge, d: $X \times X \to IR_{\geq 0}$ erfülle die Axiome:
1) $\forall_{x,y\in X} d(X,Y) \geq 0$ und $d(X,Y) = 0 \Rightarrow X = Y$
2) $\forall_{x,y\in X} d(X,Y) = d(Y,X)$ Symmetrie
3) $\forall_{x,y,z\in X} d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$ Dreiecksungleichung

Def.: (X, d) sei metrischer Raum, $x \in X, \varepsilon > 0$
$B(X,\varepsilon) := \{y \in X \mid d(X,Y) < \varepsilon\}$ <u>offene $\varepsilon - Kugel$ um X</u>
$\overline{B}(X,\varepsilon) := \{y \in X \mid d(X,Y) \leq \varepsilon\}$ <u>abgeschlossene $\varepsilon - Kugel$ um X</u>

Def.: $U \subseteq (X,d)$ <u>offen</u> $:\Leftrightarrow \forall_{x\in U} \exists_{\varepsilon>0} B(X,\varepsilon) \subset U$ („Rand gehört nicht zu U“)

$U \subseteq (X,d)$ <u>abgeschlossen</u> $:\Leftrightarrow U := X \setminus U$ ist offen

Def.: $x \in (X,d)$, U <u>Umgebung von x</u> $:\Leftrightarrow x \in U$ und es gibt $\varepsilon > 0$ mit $B(X,\varepsilon) \subseteq U$. In normierten Räumen $(X, \|\bullet\|)$ also

$B(X,\varepsilon) = \{y \in X \mid \|y-x\| < \varepsilon\}$ <u>offene $\varepsilon - Kugel$ um X</u>

$\overline{B}(X,\varepsilon) = \{y \in X \mid \|y-x\| \le \varepsilon\}$ <u>abgeschlossene $\varepsilon - Kugel$ um X</u>

Def.:

a) Sei $\underset{n\in IN}{(x_n)} \in X^{IN}$ Folge in (X,d). $\underset{n\in IN}{(x_n)}$ <u>konvergiert gegen x $\in X$.</u>

in (X, d): $\Leftrightarrow \forall_U \exists_{n_0 \in IN} \forall_{n \ge n_0} x_n \in U$

U Umgebung von X

$\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0 \in IN} \forall_{n\ge n_0} d(x_n, x) < \varepsilon$

In normierten Räumen: $\|x_n - x\| < \varepsilon$

b) $\underset{n\in IN}{(x_n)} \in X^{IN}$ <u>konvergiert</u> in (X, d) : $\Leftrightarrow \exists_{x\in X} \forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0\in IN} \forall_{n\ge n_0} d(x_n, x) < \varepsilon$

Def.: $\underset{n\in IN}{(x_n)}$ ist divergent : $\Leftrightarrow$ $\underset{n\in IN}{(x_n)}$ ist nicht konvergent.

Def.: (X, d) sei metrischer Raum, $\underset{n\in IN}{(x_n)} \in X^{IN}$, $A \subseteq X$

a) x ist <u>Häufungspunkt von $\underset{n\in IN}{(x_n)}$</u> $:\Leftrightarrow \forall_U, x_n \in U$ für <u>unendlich viele $n \in IN$</u>

$\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \{n \in IN \mid d(x_n, x) < \varepsilon\}$ unendlich.

b) x ist <u>Häufungspunkt von A</u> : $\Leftrightarrow \forall_U (U \setminus \{X\}) \cap A \ne \emptyset$

$\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} (B(X,\varepsilon) \setminus \{X\}) \cap A$ enthält unendlich viele <u>verschiedene</u> Punkte.

Satz: Will man zeigen, dass A abgeschlossen ist, wähle beliebige konvergente Folge $\underset{n\in IN}{(x_n)} \in A^{IN}$ <u>in A</u>, die gegen ein x <u>aus X</u> konvergiert. $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ und zeige $x \in A$.

Def.: $A \subseteq (X,d)$ $\overline{A} := A \cup$ { Häufungspunkte von A } heisst <u>Abschluss von A</u>.

Def.: $A \subset X$ <u>beschränkt</u> $:\Leftrightarrow \sup\{\|X\| \mid x \in A\} < \infty$

$\exists_{c\in IR_+} \forall_{x\in A} \|x\| \le c$

Def.: Ein metrischer Raum (X, d) heisst <u>vollständig</u> $:\Leftrightarrow$ Jede Cauchyfolge in X konvergiert in (X, d) gegen ein $x \in X$.

Def.: Ein vollständiger normierter Raum heisst <u>Banachraum</u>.
Ein vollständiger Prähilbertraum heisst <u>Hilbertraum</u>.

Satz: 1) $(IK^n, \|\bullet\|_2)$ ist vollständig.

2) $([a,b], \|\bullet\|_\infty)$ ist vollständig

Satz: (X, d) vollständiger metrischer Raum, $A \subset X$ abgeschlossen $\Rightarrow \left(A, d|_{A\times A}\right)$ vollständiger metrischer Raum.

Def.: (X, d) und (Y, d') seien metrische Räume, $f : x \to y$ Abbildung, $x_0 \in X$. F heisst <u>stetig in x_0</u> $:\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}\left[d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\right]$

In normierten Räumen: $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}\left[\|x-x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(x_0)\|' < \varepsilon\right]$

Def.: (X, d), (Y, d') metrische Räume, $f : X \to Y$ <u>stetig</u> $:\Leftrightarrow \forall_{x\in X}$ f stetig in X.

Satz: (X, d), (Y, d') metrische Räume, $f : X \to Y$, $x_0 \in X$

1) f stetig in x_0 $\Leftrightarrow$ $\forall_{\substack{(x_n)\in X^{IN}\\ n\in IN}} (\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim f(x_n) = f(x_0))$
2) f stetig $\Leftrightarrow \forall_{\substack{U\\ offeninY}} : f^{-1}(U)$ offen in X

Def.: (X, d) metrischer Raum, $K \subset X$, K ist <u>kompakt</u> $:\Leftrightarrow$ Jede offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung

$$\Leftrightarrow \forall_{\substack{(\sigma_i)\\ i\in I}}, \sigma_{i_{offen}} \subset X \left[K \subset \bigcup_{i\in I}\sigma_i \Rightarrow \exists_{i_1,\dots,i_s\in I} K \subset \bigcup_{j=1}^{s}\sigma_{ij}\right]$$

Def.: $\underset{i\in I}{(\sigma_i)}$ überdeckt K $:\Leftrightarrow K \subset \bigcup_{i\in I}\sigma_i$

Def.: (X, d) metrischer Raum, $K \subset X$ <u>folgenkompakt</u> $:\Leftrightarrow$ Jede Folge $\underset{n\in IN}{(x_n)} \in K^{IN}$ in K besitzt eine gegen ein Element $x \in K$ konvergente Teilfolge.

Def.: (X, d) metrischer Raum, $K \subset X$ <u>total beschränkt</u> $:\Leftrightarrow$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\substack{x_1,\dots,x_n\in K\\ endlichviele}} K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon)$$

Theorem: (X, d) metrischer Raum, $K \subset X$. Dann sind äquivalent:

1) K ist kompakt
2) K ist folgenkompakt
3) K ist vollständig und total beschränkt

Satz: (X, d) metrischer Raum, $A \subset X \Rightarrow$

1) X kompakt, A abgeschlossen $\Rightarrow$ A kompakt
2) A kompakt $\Rightarrow$ A abgeschlossen

Heine-Borel: $K \subset (IR^n, \|\bullet\|_2) \Rightarrow (K kompakt \underset{\xleftarrow[nur in IR^n]{}}{\overset{\xrightarrow{immer}}{\Leftrightarrow}} K$ beschränkt und abgeschlossen)